Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Online семинары для студентов 2 курса

(201 группа)

Математический анализ

Числовые ряды. Занятие 3

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР №3

ГРУППА 201
Сычугов Д.Ю.

Домашнее задание к предыдущему семинару:

№2615 (логарифмический признак):

1) $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1+\alpha$, где $\alpha>0$, $n > n_0 \geq 2$ $\Rightarrow \ln\dfrac{1}{a_n} \geq (1+\alpha)\ln n = \ln\left(n^{1+\alpha}\right)$

$\Rightarrow a_n \leq \dfrac{1}{n^{1+\alpha}} \Rightarrow$ ряд сходится;

2) $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1 \Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{a_n} \leq \ln n \Rightarrow a_n \geq \dfrac{1}{n} \Rightarrow$ ряд расходится.

2642 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n^\alpha} - \ln\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)$ – ?; $a_n = -\left(\ln\left(\sin\dfrac{1}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right) =$

$= -\left(\ln\left(\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{3!n^{3\alpha}} + \dfrac{1}{5!n^{5\alpha}}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right) = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{3!n^{2\alpha}} + \dfrac{1}{5!n^{4\alpha}}\right) =$

$= \dfrac{1}{3!n^{2\alpha}} + \bar{o}\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right) \Rightarrow$ сход. при $2\alpha > 1 \Rightarrow$ сход при $\alpha > \frac{1}{2}$

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 3

группа 201.
Сычугов Д.Ю.

Теория: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **(1)**, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **(2)**

Определение 1 Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд (2)

Теорема 1 Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1).

comment: Обратное утверждение, вообще говоря, неверное.

$\boxed{\text{Пример:}}$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$ сход. (докажем чуть позже!),

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расход.

Теорема 2 Если ряд (1) сходится абсолютно, то его члены можно переставлять в $\forall$ порядке, и он останется сходящимся, и притом его сумма не изменится.

Определение 2 Ряд (1) называется условно сходящимся, если ряд 1 сходится, а ряд (2) — нет.

Теорема 3 (Римана) Если ряд (1) сходится условно, то для $\forall$ наперед заданного числа B члены ряда (1) можно переставить так, что новый ряд будет сходиться, и его сумма будет B. Можно также переставить члены так, что новый ряд будет расходиться.

Определение 3 Пусть $\{a_k\}$ - числ. послед, причем все $a_k > 0$. Рядом Лейбница называется ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ **(3)**

Теорема 4 (признак Лейбница) Если $\{a_k\} \searrow 0$, то ряд (3) сход.

Comment. В признаке Лейбница монотонность $\{a_k\} \searrow 0$ обязательна. Нарушение этого условия может привести к тому, что ряд (3) будет расходиться (придумайте пример).

Comment: Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$ сход. $(S = \ln 2)$

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР №3

2701 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – сход. (признак Лейбница)

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ – расходится (как сумма сход. и расход. рядов) В то же время $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$.

⇒ Вывод: Признаки сравнения, рассмотренные нами для знакопостоянных рядов, для знакопеременных рядов, вообще говоря, неверны.

№2657 Фиксируем произв. $\varepsilon > 0$ и рассмотрим сумму:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| = \Big| \underbrace{a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+e}}_{\text{вне } A_k} + \underbrace{A_p + A_{p+1} + \ldots + A_{p+q}}_{\text{те члены, которые сгруппированы}} + \underbrace{a_{m-s} + a_{m-s+1} + \ldots + a_m}_{\text{вне } A_k} \Big|$$

$$\leq \underbrace{|a_k| + |a_{k+1}| + \ldots + |a_{k+e}|}_{\text{можно выбрать } k \text{ так, что эта сумма } < \frac{\varepsilon}{3} \text{ т.к. } |a_k| \to 0, \text{ а число членов вне } A_k \text{ конечно}} + \underbrace{|A_p + A_{p+1} + \ldots + A_{p+q}|}_{\text{можно выбрать } p \text{ так, что эта сумма будет } < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ т.к. ряд } \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ сход}} + \underbrace{|a_{m-s}| + |a_{m-s+1}| + \ldots + |a_m|}_{\text{аналогично можно выбрать } k \text{ так, что и эта сумма будет } < \frac{\varepsilon}{3}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow \text{доказ.}$$

№2666 **comment:** Это тот контрпример, который надо было придумать для признака Лейбница.

$b_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$, очевидно, что $b_n > 0$ и $\{b_n\} \to 0$, но не монотонно ($b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_4 = \frac{1}{2}$, и т. д). Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right)$$ расходится, как сумма сходящегося и расходящ. рядов.

Было ли доказательство на лекции? **Теория:** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = H(n) = C + \ln n + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ **(4)**

— Асимптотическая формула Эйлера $C = const$

$\boxed{2666.1}$ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots$ **? (5)** **1)** Ряд (5) сходится по признаку Лейбница; **2)** $S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = H(2n) - H(n) = C + \ln(2n) + \varepsilon_{2n} - C - \ln n - \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$$

Ответ: $S = \ln 2$

№2659 $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n-1)}{2^{n-1}}+\ldots$ (1)

1) Докажем, что ряд (1) сход. $|a_n|=\frac{2n-1}{2^{n-1}}=\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^{n-1}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}<\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$ при больших n.

$\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^{n-1}} \to 0$

$\Rightarrow$ ряд (1) сходится.

2) Пусть $|x|<1$. Рассмотрим функцию $f(x)=x-x^3+x^5-x^7=$
$=x(1-x^2+x^4-x^6+\ldots)=\frac{x}{1-(-x^2)}=\frac{x}{1+x^2}$ (2)

Далее, $f'(x)=(x-x^3+x^5-x^7+\ldots)'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'\Rightarrow$

$\Rightarrow 1-3x^2+5x^4-7x^6+\ldots=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ (3)

3) Подставим в (3) $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, получим:

$1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots=\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{2}{9}$ **Ответ: $\frac{2}{9}$**

---

comment: Законность перехода от (2) к (3) (то есть почленного дифференцирования) будет обоснована позже, в разделе "степенные ряды".

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 3

2702.1 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) сход. условно $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} C$ (сумма ряда)

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Rightarrow \frac{N_n}{P_n} = \frac{(|a_1|+a_1)+(|a_2|+a_2)+\dots+(|a_n|+a_n)}{(|a_1|-a_1)+(|a_2|-a_2)+\ +(|a_n|-a_n)} =$$

$$= \frac{(|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|)+(a_1+a_2+\dots+a_n)}{(|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|)-(a_1+a_2+\dots+a_n)} = \frac{1+\overbrace{\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|}}_{\to 0}} \to 1,$$ док

2702.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ – сход. при $p>0$ (приз нак Лейбница)

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots =$

$= 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right)}_{\to 0} - \underbrace{\left(\frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p}\right)}_{\to 0} - \dots < 1$ – док;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} > \frac{1}{2}$ – докажите на "+"

2680 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = \underbrace{\frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p}}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{5^p} - \frac{1}{4^p}}_{A_2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{(2k+1)^p} - \frac{1}{(2k)^p}}_{A_k} + \dots$

1) $|a_n| \sim \frac{1}{n^p} \Rightarrow$ Сход. абс. при $p>1$ – ясно

2) $A_k = \frac{1}{(2k+1)^p} - \frac{1}{(2k)^p} = \frac{1}{2^p} \frac{k^p - (k+1/2)^p}{(k+\frac{1}{2})^p k^p} = \frac{1}{2^p} \frac{1-(1+\frac{1}{2k})^p}{(k+\frac{1}{2})^p} = -\frac{1}{2^p} \frac{\frac{p}{2k} + \bar{o}(\frac{1}{k})}{(k+\frac{1}{2})^p} \Rightarrow$ усл сход. при $0<p\le 1$

На дом: 2678, 2671, 2674, 2703, 2672, 2663, 2704, 2676